EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: UMA ABORDAGEM PARA GRADUAÇÃO

Revista Eletrônica Multidisciplinar
FACEAR
ISSN: 2316-2317

Marcelo F. de Oliveira[1]; Licéia A. Pires[2]

[1] *Universidade Federal do Paraná*
[2] *Faculdade Educacional Araucária*

RESUMO

A análise do comportamento de um fenômeno físico é muito importante para o desenvolvimento de pesquisas. Esses comportamentos podem ser descritos através de modelos matemáticos que são denominados de equações diferenciais. Entender o que são essas equações é de fundamental importância para o desenvolvimento científico. Muitas vezes, nos cursos de graduação em matemática, essas equações não são abordadas, ou quando são não é dado o verdadeiro enfoque sobre a real necessidade de estudo, ou aplicação de tais equações. A solução de equações diferenciais necessita de um tratamento matemático, que dependendo da equação pode ser algo simples de fazer ou muito complicado. Esse tratamento matemático é visto em salas de aulas de cursos de graduação, mas muitas vezes o que deixa de ser apresentado aos alunos é para que servem as equações diferenciais, e como podem ser aplicadas para resolver problemas práticos. Nesse contexto é que se propõe nesse artigo, apresentar conceitos básicos de equações bem como algumas aplicações mais simples, que podem ser usadas pelos professores como motivação para o ensino e estudo de tal conteúdo.

Palavras chave: equações diferenciais; fenômenos físicos; modelagem.

ABSTRACT

The behavior of a physical phenomenon is very important for the development of research . These behaviors can be described by mathematical models that are called differential equations. Understanding what these equations is of fundamental importance to the scientific development. Often in undergraduate courses in mathematics , these equations are not addressed, or are not given the true focus on the real need for study or application of such equations. The solution of a differential equations requires a mathematical treatment , which depending on the equation can be sometime simple or very complicated to do . This mathematical treatment is seen in classrooms of undergraduate courses, but many times is not presented to the students is what are the differential equations , and how they can be applied to solve practical problems . In this context it is proposed in this paper , introduce basic concepts of equations and some simple applications that can be used by professors as a motivation for the teaching and study of such content ..

Key Words: differential equations, physical phenomena, modeling

1. INTRODUÇÃO

O interesse em entender diversos fenômenos físicos, que envolvem taxas de variações, tem sido objeto de estudos e pesquisas há muito tempo. Tais fenômenos podem ser representados matematicamente através de equações diferenciais.

Segundo LEITHOLD (1994), equações diferenciais tem grande aplicação na matemática, e as pesquisas sobre a evolução de certos fenômenos são susceptíveis de tratamento matemático, o que geralmente está relacionada as equações diferenciais. E ainda de uma maneira mais simplificada dada por GREENBERG (1998), problemas em ciência e engenharia, que tem formulação matemática, são direcionados por equações envolvendo derivadas de uma ou mais funções desconhecidas, denominadas equações diferenciais.

Tais equações tem um papel muito importante em aplicações práticas, principalmente na área das engenharias, da biologia, dentre outras, que tem como enfoque principal desenvolver soluções para problemas reais. Um exemplo claro disso é na engenharia civil, quando se projeta prédios é necessário um estudo sobre as oscilações que essa estrutura poderá sofrer, tal análise é feita matematicamente através de modelos que usam soluções de uma Equação Diferencial (ED), outra aplicação, está relacionada a problemas que envolvem populações e suas taxas de variação.

Em uma equação diferencial, o objetivo é determinar uma função que rege um determinado problema, e não um valor para a variável, como em outros tipos de equações.

No entanto, não é raro ao terminar um curso de E.D.O, que os alunos, em especial os dos cursos de licenciatura em matemática, percebam que não sabem para que serve as equações, não consigam aplicar o que aprenderam e muitas vezes se darem conta, de que não conseguiram assimilar os principais conceitos que envolvem a disciplina ou o conteúdo que foi visto.

Se os alunos perceberem que existe uma aplicação real, para o conteúdo estudado eles terão uma visão mais crítica com relação ao que estão estudando, e assim como nos diz FREIRE (2006, p.10) “ O que estuda se sente desafiado pelo texto em sua totalidade e seu objetivo é apropriar-se de sua significação profunda”.

2. TIPOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E SUAS APLICAÇÕES

Equações diferenciais são equações que envolvem derivadas de funções de uma ou mais variáveis. Essas derivadas podem ser de qualquer ordem.

As equações diferenciais dividem-se basicamente em dois tipos, equações diferencias ordinárias (EDO) e as equações diferenciais parciais (EDP).

Um exemplo bem conhecido e simples de equação diferencial é uma das leis mais famosa que foi enunciada por Newton:

$$F = m.a \tag{0.1}$$

que na verdade é uma equação diferencial, que pode ser escrita da seguinte forma:

$$F = m.\frac{d^2 s}{dt^2} \tag{0.2}$$

Essa equação é uma E.D. de segunda ordem, pois a maior derivada da função é 2.

2.1 Equações Diferencias Ordinárias

As equações diferenciais ordinárias (EDO) são um tipo bem simples dessas equações, envolvendo apenas funções com uma única variável. Por dependerem apenas de uma variável e serem relativamente simples de resolver, são chamadas de E.D.O. A equação (0.2) é uma EDO, pois S é função apenas do tempo (t).

A solução dessa equação é simples de ser encontrada, como a função só depende de uma variável, basta integrar duas vezes em relação á variável de dependência. Nota-se que após efetuada as duas integrais ficarão duas constantes, que devem ser determinadas com informações inerentes ao problema específico, tais informações são chamadas de condições iniciais e/ou condições de contorno.

Em se tratando de tempo, é comum a preocupação com o crescimento populacional ao passar dos anos. Em 1798, Thomas Maltus apresentou uma modelagem para esse problema. Na sua teoria, o crescimento populacional se daria em uma progressão aritmética, enquanto o crescimento populacional seria em progressão geométrica. A idéia principal da teoria de Maltus era a “hipótese de que a taxa segundo a qual a população de um país cresce em um determinado instante e proporcional a população total do país naquele instante" ZILL (2009, p.23).

Em termos de equação diferencial, essa hipótese pode ser descrita pela equação diferencial ordinária linear dada por dP/dt = k. P onde P: população; t: tempo e k: taxa constante.

Resolvendo essa equação, temos que $P(t) = P_0 \,.\, e^{k.t}$, onde P_0 é a população inicial, ou seja $P_0 = P(0)$, e desta forma se k > 0 a população continuará a crescer, se k < 0 a população irá decrescer com o passar dos anos.

Esse é mais um exemplo simples de como as equações diferenciais estão relacionadas a situações práticas.

Uma outra variação para esse problema pode ser: indicando-se por Q(t) a quantidade de pessoas que tomam conhecimento sobre o aumento no preço da cesta básica no instante t e por K(t) a quantidade total da população pesquisada, tem-se que a taxa que representa o número de pessoas que tomam conhecimento do aumento é dada por $\frac{dQ}{dt}$ e o número de pessoas que não sabem sobre o aumento é dado por K(t) – Q(t), e a equação diferencial obtida de tal situação pode se expressa por: $\frac{dQ}{dt} = k($K-Q), onde k representa uma constante de proporcionalidade.

Na economia também podem aparecer as equações, como por exemplo (ABUNAHAMAN, 1982, p.26): "Um investidor aplica na bolsa de valores determinada quantia que triplica em 30 meses. Em quanto tempo essa quantia estará quadruplicada, supondo-se que o aumento é proporcional ao investimento feito?"

A equação que expressa tal situação pode ser dada por $\frac{dy}{dt} = ky$

Sendo y_0 o investimento no tempo t = 0 e y a quantia a cada instante.

Com y é a incógnita do problema e t a variável independente pode-se escrever

$$\frac{dy}{y} = kdt$$

Resolvendo a integral, para o investimento $y = y_0$ e t=0, tem-se,

$y = y_0 e^{kt}$

para t = 30 meses, $y = 3y_0$ logo, $3 = e^{30k}$

se $y = 4y_0$ e $4 = e^{kt}$ e $430 = e^{30kt} = 3t$ então $4^{30} = 3t$

Aplicando o logaritmo, tem-se t = 37,8 meses.

2.2 Equações Diferencias Parciais

As equações diferenciais parciais ou EDP são um tipo mais geral de equações. São equações que envolvem derivadas de funções com mais de uma variável, logo essas derivadas são derivadas parciais.

Um exemplo simples desse tipo de equação é a equação da difusão, que rege problemas de distribuição de temperaturas em corpos sólidos, para mais detalhes sobre o problema é indicado ao leitor ver Oliveira (2011).

$$\frac{d^2u(x,t)}{dx^2} = \frac{1}{k}\frac{du(x,t)}{dt} \tag{0.3}$$

Nota-se na equação (0.3) que u é uma função de duas variáveis independentes, x e t.

2.3 Solução de uma E.D.

Existem diversas técnicas para resolver uma ED, mas o objetivo principal é encontrar uma função que satisfaça a equação a ser resolvida.

Exemplo 1

Dada a EDO:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 3y = 0 \tag{0.4}$$

É necessário encontrar uma função y(x), que satisfaça a igualdade.

Uma função que pode ser adotada é uma exponencial:

$$y(x) = e^{m.x} \tag{0.5}$$

Fazendo as derivadas primeira e segunda:

$$\frac{dy}{dx} = m.e^{m.x} \tag{0.6}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m^2.e^{m.x} \tag{0.7}$$

Substituindo-se na equação (0.4) e determinar os valores de m.

Assim uma solução para a E.D.O (0.4) é dada por:

$$y(x) = e^{x} + e^{\frac{-3}{2}x} \tag{0.8}$$

3. CONCLUSÃO

Este artigo apresentou que as equações diferenciais são equações que envolvem derivadas de funções e consequentemente, podem ser usadas para resolver ou modelar situações sobre taxas de variações de variáveis. Resolver uma equação diferencial é buscar uma função que venha a satisfazer uma determinada equação.

São inúmeras as aplicações de equações diferenciais, os exemplos mostrados aqui, fazem referência a modelos que variam ao longo do tempo, e podem ser chamados de sistemas dinâmicos.

No entanto percebe-se nos cursos de graduação em especial nos cursos de licenciatura em matemática, que os professores ao trabalharem com seus alunos licenciandos, não apresentam o conteúdo ou mesmo a disciplina, como algo aplicado, que pode ser pensado, reelaborado, que pode ser usado para modelar problemas físicos reais. Desta forma, muitas vezes as aulas ficam restritas apenas em apresentar o que são equações diferenciais, suas classificações e as diversas formas de resolução, e assim os alunos já recebem tudo pronto e não se sentem desafiados a novas descobertas.

4. REFERÊNCIAS

ABUNAHMAN, S. A. Equações diferenciais: destinados aos cursos de engenharia, física, química e matemática. Rio de Janeiro: LTC, 1982.

FREIRE, P. Ação cultural para a liberdade. São Paulo: Paz e Terra, 2006.

GREENBERG, M. D., “Advanced Engineering Mathematics”, Prentice Hall-2ª edição, New Jersey, 1998

LEITHOLD, L. O Cálculo com geometria analítica, Vol. 1. 3. ed São Paulo: HARBRA, 1994.

ZILL, D. G. Equações diferenciais com aplicações em modelagem. São Paulo: Cengage Learning, 2009.